Il concetto di «astrazione» in matematica

Il termine di «astrazione», utilizzato di frequente a livello di linguaggio comune, è così caricato di molti significati e può dar luogo ad equivoci. Bisogna, perciò, riportare ciascuno di essi all'interno di un preciso contesto disciplinare. Ad esempio, in matematica, «astrazione» significa...

Carlo Felice Manara

Il termine «astrazione», come moltissimi altri, è utilizzato nel linguaggio comune; quindi gli si attribuiscono abitualmente molti significati. La precisazione e la distinzione di uno di essi dagli altri avviene per mezzo del contesto in cui il termine è inserito; tale contesto può essere una frase, una pagina, oppure un libro o l'intera opera di un autore, il quale usa un termine in un senso che dipende dalla sua cultura, dalla sua sensibilità, dalle sue abitudini e dal resto della sua opera.

Ricordiamo che il termine è stato utilizzato, fino dai tempi della filosofia greca e della Scolastica, per indicare una operazione mentale che è fondamentale per la conoscenza umana; almeno secondo una certa concezione di questa che non vuole perdere i contatti col senso comune. Cercheremo quindi di riflettere anzitutto sull'impiego che si fa del termine nel linguaggio quotidiano.

Il «Novissimo Dizionario della Lingua italiana» di Fernando Palazzi, alla voce «Astrazione» porta:

> [dal latino «abstractio»]. Facoltà della mente di distinguere l'una dall'altra le singole qualità di un oggetto sensibile, pensando ciascuna indipendentemente dalle altre, e dando ad ognuna un'esistenza a sé (Ranzoli). Concetto astratto, che non ha realtà effettiva, concreta. Distrazione. ... «Fare astrazione da una cosa»: prescinderne, non considerarla.

A sua volta, alla voce «Prescindere» lo stesso Dizionario porta:

> Fare eccezione, lasciare da parte, fare astrazione.

E come sinonimi troviamo:

> Eccettuare, omettere.

Pertanto si potrebbe dire che, secondo il linguaggio comune, l'operazione mentale che conduce all'astrazione significa guardare soltanto ad una parte delle cose, considerarne soltanto un aspetto od alcuni aspetti e non tener conto di altri. Così per esempio si legge che gli italiani «... facendo astrazione dal sesso e dall'età...», sono 57 milioni; oppure si legge che «prescindendo dal sesso e dall'età», gli italiani sono 57 milioni.

COSTRUIRE I CONCETTI

Pertanto questa operazione viene eseguita abitualmente; e viene rappresentata nel linguaggio comune con i termini ben noti, che abbiamo citato.

Passando ai contenuti matematici, si potrebbe osservare che l'operazione di astrazione, nel senso sopra descritto, sta all'origine della costruzione dei concetti aritmetici e geometrici.

Per esempio, se consideriamo un insieme finito concreto (gli alunni in un'aula, le palline in un'urna, i vagoni trascinati da una locomotiva, gli abitanti di una regione ecc.) si giunge alla costruzione del concetto di numero cardinale prescindendo, o facendo astrazione, se così si vuole dire, dalla natura dei singoli oggetti: così il numero 4 si ottiene per astrazione dall'insieme dei punti cardinali, da quello dei semi delle carte da gioco (picche, cuori, quadri e fiori, oppure coppe, denari, spade e bastoni), oppure dall'insieme degli Evangelisti ecc. Anche le operazioni sui numeri si ottengono per astrazione da quelle che si eseguono sugli insiemi.

Personalmente ritengo che in ognuno di questi casi si esegua una operazione di astrazione che risponde al senso del termine così come è stato presentato dalla citazione del Dizionario ricordato sopra.

Cose analoghe si potrebbero dire a proposito della costruzione degli oggetti mentali studiati dalla geometria: per esempio, quando si dice che un mattone ha la forma di parallelepipedo rettangolo, si intende che il concetto di questo solido geometrico viene costruito prescindendo (o facendo astrazione) dalla costituzione chimica del mattone, dal suo peso, dalle proprietà fisiche, e dalla sua posizione relativamente ad altri oggetti.

Si deve osservare che in queste operazioni mentali interviene anche l'immaginazione, che spesso completa, estende e ricollega i dati dei sensi. Ritorneremo su questa osservazione, ma ci limitiamo per ora a rilevare che la costruzione di una immagine è una caratteristica comune a quasi tutte le operazioni di costruzione di oggetti mentali.

Non intendiamo fare qui una analisi psicologica per determinare i procedimenti mentali che conducono alla costruzione dei concetti astratti; meno ancora intendiamo addentrarci in questioni filosofiche, le quali potrebbero condurci a discussioni del tipo di quella medievale classica, passata alla storia sotto la denominazione «Quaestio de universalibus».

Ci limitiamo quindi soltanto a ricordare che la problematica relativa al significato ed alla portata degli oggetti mentali, costruiti con la procedura di astrazione, è molto antica, ed è stata trattata già dalla filosofia greca e da quella medievale. In forma rudimentale ed approssimata potremmo limitarci ad osservare che l'astrazione conduce a costruire un concetto il quale molto spesso risulta applicabile a diversi oggetti concreti: così, ricordando gli esempi presentati sopra, il numero «quattro» è una risposta valida alla domanda: «Quanti sono gli oggetti di questo insieme?» qualora si tratti dell'insieme dei punti cardinali, di quello delle gambe di un tavolo, di quello degli Evangelisti, di quello dei semi delle carte e così via.

Osserviamo ancora, in modo del tutto superficiale, che l'operazione di astrazione ci può condurre ad assegnare un medesimo oggetto (materialmente preso) a diversi insiemi; si potrebbe dire che un medesimo oggetto può essere considerato da diversi punti di vista: così il mattone, dal punto di vista della geometria può essere ascritto alla classe dei parallelepipedi rettangoli, dal punto di vista della chimica all'insieme dei silicati, dal punto di vista della meccanica all'insieme dei corpi rigidi e così via. Si tratta di diverse operazioni di astrazione, con le quali un oggetto viene attribuito ad un determinato insieme: così per esempio come corpo rigido il mattone può stare insieme ad un sasso rotondo, ma non dal punto di vista della geometria.

IMMAGINI E CONCETTI

Come abbiamo detto, non affrontiamo per ora l'analisi delle procedure con le quali la nostra mente esegue l'operazione di astrazione; ci limitiamo ad osservare che uno dei fondamenti di una procedura cosiffatta potrebbe consistere nel fatto di rilevare la esistenza di caratteristiche comuni a più oggetti. Ma questa procedura non può essere considerata l'unica possibile, e spesso conduce a risultati fuorvianti: ciò è dovuto anche al fatto, che abbiamo rilevato, che spesso l'operazione di astrazione è accompagnata dalla costruzione di una immagine, la quale può limitare la estensione teorica del concetto costruito.

Un esempio caratteristico di questo fenomeno è costituito dall'applicazione dei concetti geometrici agli oggetti della vita quotidiana: per esempio, nelle presentazioni elementari dei solidi più comuni, noi siamo abituati ad associare al termine tecnico «Cilindro circolare retto» un oggetto che ha press'a poco la forma di un bicchiere rotondo. Spesso è necessario un certo sforzo per accettare il fatto che, per esempio anche un dischetto di «Compact disk», considerato come solido, ha diritto di essere considerato un cilindro, a tutti gli effetti; e lo stesso si può dire di un segmento di capello stirato in forma diritta.

Giuseppe Peano (1858-1932)

Un altro esempio tipico di differenza tra immagine e concetto è dato dalla geometria: i poligoni regolari di 17 e di 19 lati sono ben difficilmente distinguibili tra loro per quanto riguarda le immagini. Ma i loro concetti sono nettamente distinti per quanto riguarda le proprietà: per esempio quello di 17 lati è costruibile con riga e compasso, quello di 19 no (Gauss). Analogamente: il chiliagono o anche il miriagono regolari non ammettono immagini mentali: si «confondono» con la circonferenza; ma il loro concetto è nettamente distinto.

Abbiamo detto che abitualmente il concetto astratto nasce dalla osservazione delle proprietà comuni a molti oggetti, dei quali si coglie la somiglianza, rispetto ad un determinato punto di vista.

Osserviamo tuttavia che questa procedura non è l'unica che può portare alla costruzione di un concetto. In matematica questa operazione si realizza spesso con la presentazione di esempi che chiameremo paradigmatici.

Il dizionario già citato, alla voce «Paradigma» porta:

[dal greco «paràdeigma», esempio] modello in forma schematica, tavola.

Il termine «tavola» qui è usato nel significato di «tabella, elenco»; così in grammatica latina si chiama «paradigma» di un verbo l'elenco delle prime persone dei suoi vari tempi e modi: presente, futuro, passato prossimo, passato remoto (perfetto), piuccheperfetto, condizionale, congiuntivo, gerundio, participi, infiniti ecc.

Come è noto, questo elenco serve per costruire non soltanto le voci delle altre persone dello stesso verbo, ma anche per costruire le forme di moltissimi altri verbi che appartengono alla stessa classe del primo: classe che in grammatica si chiama, come è noto, «coniugazione».

Si potrebbe osservare che molti dei concetti della matematica vengono costruiti ed appresi con una procedura che potrebbe essere detta paradigmatica: ciò avviene per il concetto di numero naturale, e poi con le convenzioni di rappresentazione di numeri cosiffatti, e infine per le operazioni su di essi.

Infatti l'analisi critica dei fondamenti della matematica conduce a concludere che non ci si può illudere di definire il numero naturale con una frase dei tipo: «Il numero è ...»; occorre accontentarsi di una definizione del tipo di quelle che vengono chiamate «definizioni implicite» o anche «definizioni d'uso» o «definizioni per assiomi» o «per postulati». Così ha fatto G. Peano in una memoria fondamentale del 1882, scritta in latino ed intitolata: «Arithmetices principia nova methodo exposita». Ivi il grande matematico piemontese non scrive una frase del tipo di quella citata sopra «Il numero è...»; ma incomincia a parlare direttamente del numero naturale, e presenta delle proposizioni non dimostrate le quali permettono di dedurre tutta l'aritmetica razionale. Tali frasi sono da Peano chiamate «proposizioni primitive»; oggi vengono richiamate abitualmente nella letteratura mondiale con l'espressione «assiomi di Peano».

Tra gli assiomi enunciati da Peano vi è quello che viene chiamato «di induzione»; esso permette la dimostrazione rigorosa delle leggi dell'aritmetica valide per ogni numero; in particolare permette di definire rigorosamente le operazioni e di dimostrare le loro proprietà.

Tuttavia la procedura abituale con la quale ognuno costruisce fin dall'infanzia il concetto di numero naturale è ben diversa; e quindi diversa è anche la via che si segue nell'insegnamento elementare: in quest'ultimo caso infatti tanto il concetto di numero che le

Blaise Pascal (1623-1662)

operazioni e le loro proprietà vengono presentati in modo paradigmatico, cioè attraverso esempi caratteristici, presentati in numero sufficiente perché il discente si impadronisca per conto proprio dei concetti. La stessa procedura viene utilizzata per insegnare gli algoritmi delle varie operazioni aritmetiche, specialmente quando vengano eseguite utilizzando le abituali convenzioni per rappresentare i numeri. Pertanto si potrebbe dire a buon diritto che il concetto di numero, delle operazioni sui numeri e dei significati corrispondenti, vengono acquisiti con una operazione di astrazione; questa conduce a prescindere dai contenuti degli esempi particolari e conduce al possesso del concetto di numero e delle operazioni sui numeri in tutta la loro generalità.

Ciò che abbiamo detto fin qui può indurre qualcuno a pensare che la matematica è una scienza che utilizza un concetto (quello di numero) che non è capace di definire. Le cose stanno in modo lievemente diverso: infatti è stato riconosciuto da tempo che non è possibile procedere all'infinito nelle definizioni formali dei concetti. Per esempio già nel secolo XVII il grande matematico, filosofo e teologo Blaise Pascal, nella sua opera intitolata «De l'esprit géométrique et de l'art de persuader», osserva ripetutamente ed esplicitamente che non è possibile definire tutto. Con altre parole, si potrebbe dire che occorre scegliere certi concetti fondamentali che si assumono come punti di partenza per costruire gli altri concetti, di cui ci serviamo per la conoscenza, volgare e scientifica. Tali concetti fondamentali possono essere presentati soltanto in forma implicita, con proposizioni che, a loro volta, non possono essere dimostrate usando le procedure abituali di dimostrazione.

La matematica ha compiuto da tempo questo cammino di chiarimento dei propri fondamenti logici. Pertanto da tempo, insieme con il concetto di numero, i matematici hanno riconosciuto la impossibilità e l'intrinseca vanità dei tentativi di definire (nel senso classico del termine) anche i concetti fondamentali della geometria. Quindi alla celebre frase di Euclide: «Il punto è ciò che non ha parte» non viene oggi attribuito il significato di definizione, nel senso logico del termine.

Analoghe considerazioni valgono per altre frasi che sono altrettanto invalide dal punto di vista della logica: per esempio la frase (che si può leggere in qualche manuale) «Il punto è l'ente geometrico fondamentale privo di dimensioni».

IL PENSIERO MATEMATICO

Da quanto precede si trae che l'operazione di astrazione, così come l'abbiamo presentata, è il punto di partenza fondamentale del pensiero matematico. Dunque, da questo punto di vista, tale pensiero si presenta sostanzialmente come pensiero astratto, cioè come un insieme di concetti che non sono distaccati dalla realtà (perché nascono dall'esperienza concreta), ma sono stati costruiti per astrazione da essa; ciò implica tra l'altro che tali concetti hanno validità anche in corrispondenza a contenuti diversi da quelli che hanno offerto l'occasione per la loro costruzione.

Così per esempio il fatto che quattro più due dà sei vale tanto se si applica all'insieme di quattro mattoni, al quale si uniscono due altri mattoni quanto se si applica al gruppo di quattro ragazzi ai quali se ne uniscono altri due.

Si può osservare che un caso tipico di astrazione si presenta quando si costruisce il concetto di «grandezza». Infatti si applica questo concetto ad una grandissima quantità di oggetti concreti che hanno certe qualità comuni; e la costruzione del concetto avviene precisamente prescindendo dalle differenze.

Considerazioni analoghe si possono svolgere a proposito dell'immagine del continuo geometrico.

Ci interessa sottolineare qui il legame tra il pensiero matematico e la realtà empirica, dalla quale esso prende le origini. Ciò distingue la matematica da un puro gioco formale, dotato di regole coerenti, ma distaccato dalla realtà. Un esempio tipico di gioco di tal genere è fornito dagli scacchi: qui abbiamo un insieme di simboli (che sono i pezzi e la scacchiera) e di regole per operare con essi; partendo da una configurazione iniziale dei simboli, le regole permettono di costruire tantissime altre configurazioni valide. La condotta del gioco può essere assimilata ad un calcolo, perché si può passare da una configurazione ad un'altra soltanto rispettando le regole di gioco. Ma queste non nascono dall'esperienza sul mondo reale e quindi i risultati delle operazioni non hanno alcun significato di previsione sulla realtà concreta.

Considerazioni analoghe possono essere svolte a proposito dei vari giochi con le carte, o di altri esercizi mentali. Invece in matematica i simboli, pur essendo convenzionali ed artificiali, hanno un referente, almento al momento della loro origine; in altre parole essi nascono come «simboli di qualche cosa», anche se, con lo sviluppo delle teorie, i simboli si distaccano sempre di più da una realtà materiale in vista della quale erano stati creati.

Ovviamente queste considerazioni non hanno alcuna attinenza con il fatto che i vari giochi nominati possano stimolare le capacità di deduzione, di previsione e di inventiva di coloro che li praticano; e pertanto possano servire da palestre per attività mentali.

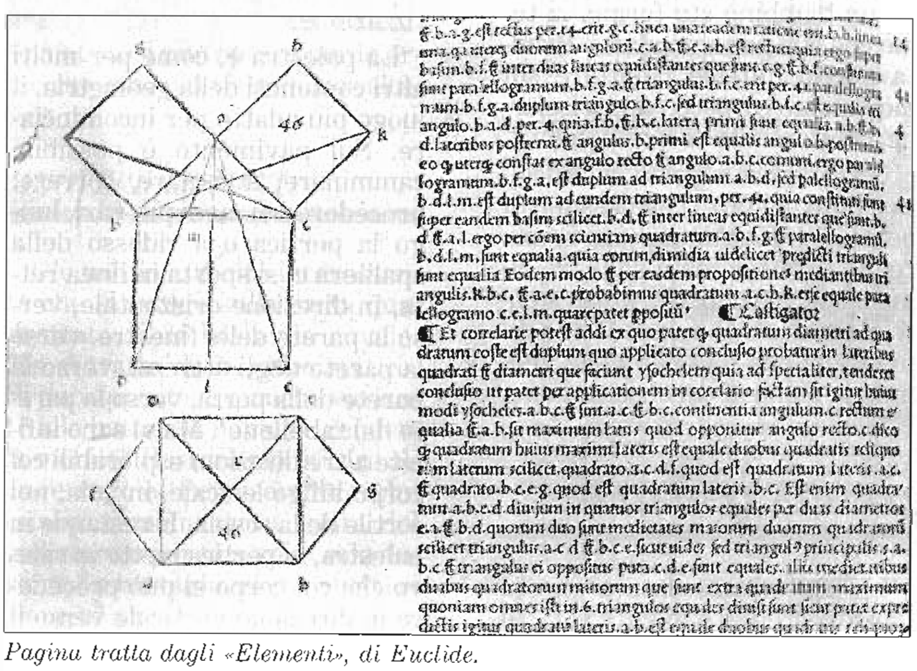
LA DEDUZIONE

Abbiamo visto che l'operazione di astrazione conduce alla costruzione dei concetti. Si potrebbe anche dire, con altre parole, che essa conduce alla determinazione di certi insiemi; e che proprio la operazione di astrazione permette di dare ad un concetto quella generalità, che è il fondamento della sua applicabilità ad ogni elemento dell'insieme costruito. Aggiungiamo qui che l'astrattezza del concetto è anche fondamento della sua validità nella deduzione: infatti qualunque dimostrazione matematica si fonda sulla concatenazione logica dei concetti tra di loro; e la dimostrazione ha valore assoluto proprio in conseguenza del carattere astratto dei concetti di cui tratta. Dalla cronaca giornalistica ho appreso che il grande matematico Vito Volterra, nello scrivere a B. Mussolini il suo rifiuto a giurare fedeltà al regime fascista, pare abbia aggiunto la frase: «Muoiono gli imperi, ma i teoremi di Euclide conservano eterna giovinezza».

Si può osservare infine che la deduzione a livello astratto è anche fondamento della soluzione razionale dei problemi. Infatti già in Euclide (e poi nelle opere di Proclo) si trovano codificati i due momenti di analisi e di sintesi che ancora oggi costituiscono i pilastri fondamentali per la soluzione dei problemi matematici; e non soltanto di questi, ma anche di qualunque problema al quale si voglia dare una risposta che ha validità generale o sia logicamente fondata. Per esempio è facile verificare, dalla lettura di un qualunque libro giallo, che la ricerca della soluzione di un problema poliziesco, nella misura in cui è razionale (e quindi non casuale o accidentale) viene fatta applicando ripetutamente i procedimenti logici di analisi e di sintesi.

Ciò che abbiamo detto finora intende riferirsi esclusivamente al momento in cui la soluzione di un problema viene codificata ed esposta (a noi stessi ed agli altri) in modo logicamente valido ed inattaccabile; non ci interessiamo qui di quello che viene chiamato il momento «euristico» o anche «intuitivo» della soluzione; si tratta infatti di avvenimenti mentali che esulano dalle presenti considerazioni, che riguardano l'operazione logica di astrazione.

Carlo Felice Manara,
Professore emerito di Geometria, Università di Milano



Pagina tratta dagli «Elementi», di Euclide.